durumda $N(A)^{\perp} = R(A^T)$ ve $N(A^T)^{\perp} = R(A)$ yazılabilir. Ayrıca $Ax=b$ kararlı olması $\Leftrightarrow$ $b \in R(A)$ olduğu ve $R(A) = N(A^T)^{\perp}$ olduğundan aşağıdaki sonucu yazabiliriz

Sonuç: Eğer A, $m \times n$ tipinde matris ve $b \in \mathbb{R}^m$ ise
ya $Ax=b$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}^n$ vardır
veya öyle $y \in \mathbb{R}^m$ vardır ki $A^T y = 0$ ve
$y^T b \neq 0$ dır.

Örk: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ olsun. $N(A)$, $R(A^T)$, $N(A^T)$ ve $R(A)$ bazını ve boyutunu bul.

$$N(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_2 + x_3 = 0$

$x_3 = \alpha$

$x_2 = -\alpha$

$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \alpha$

293

$$N(A) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$N(A)$'nın bir bazı $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dir. $boy(N(A)) = 1$

$$R(A^T) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$R(A^T)$'nın bir bazı $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ dir.

$$boy(R(A^T)) = 2$$

$$N(A)^{\perp} = R(A^T)$$

$$boy\, \mathbb{R}^3 = boy\, N(A) + boy\, R(A^T)$$

294

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \in N(A) \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \in R(A^T)$$

$$x^T y = 0 \qquad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_2 + x_3 &= 0 \\ x_3 &= \alpha \\ x_2 &= -\alpha \end{aligned}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \alpha \qquad x = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$N(A^T) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

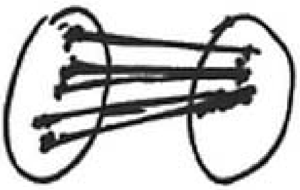
$N(A^T)$'nin bir bazı $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ dir.

boy $N(A^T) = 1$

$$R(A) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$R(A)$'nın bir bazı $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ dir.

boy $R(A) = 2$

L: 

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$x \to Ax$$

$m \times n$ tipindeki bir A matrisi $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineer dönüşüm olarak düşünüldüğünde ve $R(A^T)$ ve $N(A)$'nın $\mathbb{R}^n$'de dik tümleyen oldukları bilindiğinde

$$\mathbb{R}^n = R(A^T) \oplus N(A)$$

olduğunu görmek zor değildir. Buna göre $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $y \in R(A^T)$ ve $z \in N(A)$ olmak üzere

$$x = y + z$$

olarak tek türlü yazabiliriz. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$N(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \}$$

$$Ax = A(y+z) = Ay + Az = Ay$$

dır. Dolayısıyla

$$R(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} = \{Ay : y \in R(A^T)\}$$

dır. Yani A'nın tanım kümesini $R(A^T)$ aldığımızda A, $R(A^T)$'dan $R(A)$'ya örtendir. (üzerinedir)

Ayrıca bu dönüşüm bire-birdir. Gerçekten

$$Ay_1 = Ay_2$$

$$Ay_1 - Ay_2 = 0 \Rightarrow A(y_1 - y_2) = 0$$

$y_1 - y_2 \in N(A)$ $\qquad$ $y_1, y_2 \in R(A^T)$ olduğundan

$$y_1 - y_2 \in R(A^T)$$

ve $\quad N(A) \cap R(A^T) = \{0\}$

olduğundan $\quad y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$ dır.

Dolayısıyla $R(A)$'dan $R(A^T)$'ye ters dönüşüm tanımlanabilir.

Örnek: $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad 2\times 3 \quad$ $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= \alpha \end{aligned}$$

$2\times 3 \quad 3\times 1$

$$N(A) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$R(A^T) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$AX = Ay$$

$$X \in \mathbb{R}^3 \qquad AX = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$$

$$y \in R(A^T) \qquad Ay = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\cancel{y = Ax}$ $\quad b = Ay$

$$A : R(A^T) \to R(A)$$

$$B : R(A) \to R(A^T)$$

$$Ay = b \qquad A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

İç Çarpım Uzayları

Skaler çarpım yalnız $\mathbb{R}^n$'de değil genel vektör uzaylarındada önemli bir kavramdır. Şimdi bu tanımı diğer vektör uzaylarına genelleyelim.

Tanım: Bir V vektör uzayındaki her x ve y vektör çiftine, bir reel sayı $<x,y>$ karşılık getiren ve aşağıdaki şartları sağlayan işleme V vektör uzayı üzerinde bir ~~iç~~ iç çarpım denir.

1) $<x,x> \geq 0$ ve $<x,x>=0 \Leftrightarrow x=0$

2) Her $x,y \in V$ için $<x,y> = <y,x>$

3) Her $x,y,z \in V$ ve bütün α,β skalerleri için $<\alpha x+\beta y, z> = \alpha <x,z> + \beta <y,z>$

Üstünde iç çarpım tanımlı vektör uzayına iç çarpım uzayı denir.

Örnek 1) $\mathbb{R}^n$'de skaler çarpım bir iç çarpımdır.

$$<x,y> = x^T y$$

1) $<x,x> = x^T x = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$

$<x,x>=0 \Rightarrow x=0$

$x=0 \Rightarrow <x,x>=0$

2) $<x,y> = x^T y = y^T x = <y,x>$

3) $\langle \alpha x+\beta y, z\rangle = (\alpha x+\beta y)^T z$

$$= (\alpha x^T + \beta y^T) z$$
$$= \alpha x^T z + \beta y^T z$$
$$= \alpha \langle x, z\rangle + \beta \langle y, z\rangle$$

Bu iç çarpıma $\mathbb{R}^n$'de standart iç çarpım denir.

2) $\mathbb{R}^n$'de pozitif elemanları olan bir w vektörü verilsin. ($w=(w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$)

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i w_i$$

bir iç çarpımdır.

w_i'lere iç çarpımın ağırlıkları denir.

$w_i = 1$ $i=1,2,..,n$ alınırsa standart iç çarpım elde edilir.

3) $R^{m\times n}$'de A ve B iki matris olsun. $R^{m\times n}$'de bir iç çarpımı

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

olarak tanımlayabiliriz.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$\langle A, B\rangle = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} + a_{13} b_{13} + a_{21} b_{21} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{23}$$

4) $C[a,b]$'de iç çarpımı

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

olarak tanımlayabiliriz.

(örneğin iç çarpım şartının üçüncüsünü görelim: $f,g,h \in C[a,b]$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

$$\langle \alpha f+\beta g, h\rangle = \int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]\,h(x)\,dx$$

$$= \int_a^b [\alpha f(x)h(x) + \beta g(x)h(x)]\,dx$$

$$= \int_a^b \alpha f(x)h(x)\,dx + \int_a^b \beta g(x)h(x)\,dx$$

$$= \alpha\int_a^b f(x)h(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)h(x)\,dx$$

$$= \alpha\langle f,h\rangle + \beta\langle g,h\rangle \;)$$

5) $C[a,b]$'de başka bir iç çarpımı $w(x)$ $[a,b]$'de pozitif sürekli fonksiyon olmak üzere

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,w(x)\,dx$$

olarak tanımlayabiliriz. $w(x)$'e ağırlık fonksiyonu denir.

6) $x_1, x_2, \dots, x_n$ farklı reel sayılar olsun. P_n'de bir iç çarpım

$$\langle p,q\rangle = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\,q(x_i)$$

olarak tanımlayabiliriz.

7) $w(x)$ pozitif fonksiyon ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ farklı reel sayılar olmak üzere P_n'de başka bir iç çarpım,

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\, q(x_i)\, w(x_i)$$

olarak tanımlayabiliriz.

İç çarpım uzaylarının temel özellikleri

$\mathbb{R}^n$'deki skalar çarpımın özelliklerini iç çarpım uzayına genelleyebiliriz. Eğer v iç çarpım uzayı V'de bir vektör ise v'nin uzunluğu veya normu

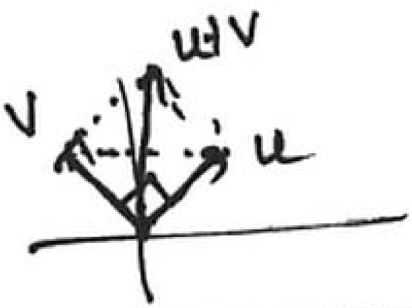
$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

olarak tanımlanır. Eğer $\langle u, v \rangle = 0$ ise u ve v vektörlerine diktir denir.

Teorem: (Pisagor kuralı) Eğer u ve v bir iç çarpım uzayı V'de dik iseler

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

dır.



ört 1) $C[-1,1]$'de iç çarpım (örk 4)'teki gibi tanımlansın. $\left(\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx\right)$

$f(x)=1 \quad g(x)=x$

$$\langle 1,x\rangle = \int_{-1}^{1} 1.x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

1 ve x fonksiyonları diktir. Buna göre pisagor kuralı geçerlidir.

$$\|1\| = \sqrt{\langle 1,1\rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1.1\,dx} = \sqrt{2}$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\|1\|^2 + \|x\|^2 = 2+\frac{2}{3} = \frac{8}{3} = \|1+x\|^2$$

$$\|1+x\|^2 = \langle 1+x, 1+x\rangle$$

$$= \int_{-1}^{1} (1+x)^2 dx = \int_{-1}^{1} (1+2x+x^2)dx$$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

2) $C[-\pi,\pi]$'de ağırlıklı fonksiyon sabit $w(x) = \frac{1}{\pi}$ alınırsa ve iç çarpım

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

olarak tanımlanırsa (örk 5'deki gibi)

cosx ve sinx

311

$$\langle \cos x, \sin x \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin x \, dx \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = u \\ \cos x dx = du \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int u \, du \left(= \frac{1}{\pi} \frac{u^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 x}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 0$$

$$\|\cos x\|^2 = \langle \cos x, \cos x \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= 1$$

312

$$\|\sin x\|^2 = \langle \sin x, \sin x \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right) dx = 1$$

$$\|\sin x + \cos x\|^2 = \|\sin x\|^2 + \|\cos x\|^2$$

$$= 1 + 1 = 2$$

$R^{m \times n}$ de (örnek 3) tanımlanan iç çarpıma göre alınan norma <u>Frobenius normu</u> denir ve $\|\cdot\|_F$ ile gösterilir. Buna göre eğer $A \in R^{m \times n}$ ise

$$\|A\|_F = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}$$

3) $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\3&3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1&1\\3&0\\-3&4\end{bmatrix}$ $\quad A,B\in R^{3\times 2}$

$\|A\|_F=?$ $\quad \|B\|_F=?$ $\quad \langle A,B\rangle=?$

$$\|A\|_F=\sqrt{\langle A,A\rangle}=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}^2}$$

$$=\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2+a_{21}^2+a_{22}^2+a_{31}^2+a_{32}^2}$$

$$=\sqrt{1^2+1^2+1^2+2^2+3^2+3^2}$$

$$=5$$

$$\|B\|_F=\sqrt{(-1)^2+1^2+3^2+0^2+(-3)^2+4^2}=6$$

$$\langle A,B\rangle=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}b_{ij}$$

$$=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+$$
$$a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}$$

$$=1.(-1)+1.1+1.3+2.0+3.(-3)+3.4$$

$$=6$$

4) $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&0\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix}0&-6\\6&3\end{bmatrix}$

$\langle A,B\rangle=0$ $\qquad \|A\|^2=9$

$\|B\|^2=81$

$$\|A+B\|^2=\|A\|^2+\|B\|^2=9+81=90$$

315

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & -4\\ 8 & 3\end{bmatrix} \qquad \|A+B\|^2=90$$

5) P_5'de iç çarpımı (örk 6)'daki gibi tanımlarsan ve $x_i=\frac{i-1}{4}$, $i=1,2,\dots,5$ $(x_1=0,\ x_2=\frac{1}{4},\ x_3=\frac{2}{4},\dots)$ olsun. $p(x)=4x$ ile $p(x)$'in uzunluğunu bulunuz.

$$\|p(x)\|=\sqrt{\langle p,p\rangle}$$

$$\langle p,p\rangle=\sum_{i=1}^{5}p(x_i)\,p(x_i)=\sum_{i=1}^{5}p^2(x_i)$$

316

$$\langle p,p\rangle=[p(0)]^2+[p(\tfrac{1}{4})]^2+[p(\tfrac{2}{4})]^2+[p(\tfrac{3}{4})]^2+[p(1)]^2$$

$$=0+1^2+2^2+3^2+4^2=30$$

$$\|p(x)\|=\sqrt{30}$$

Tanım: u ve v, iç çarpım uzayı V'de iki vektör ve $v\neq 0$ ise u'nun v üzerinde skaler izdüşümü

$$\alpha=\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|}$$

ve u'nun v üzerine vektör izdüşümü

$$p=\alpha\left(\frac{v}{\|v\|}\right)=\frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\cdot v$$

olarak verilir.

317

Teorem: p, u'nun v üzerine vektör izdüşümü ve

$v \neq 0$ ise

a) $u-p$ ve p diktir

b) $u=p \iff u$, v'nin skaler katı ise

Teorem: (Cauchy-Schwarz eşitsizliği)

u ve v, iç çarpım uzayı V'de iki vektör ise

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\|$$

dir.

318

Ortonormal kümeler

$\mathbb{R}^n$'de sık sık kullandığımız baz takımı $\{e_1, e_2\}$ (dik ve birim uzunlukta) bize nasıl kolaylık sağlıyorsa, iç çarpım uzaylarında da ortonormal (dik ve uzunluğu 1 olan vektörler) baz takımı benzer kolaylık sağlar.

Tanım: $v_1, v_2, \ldots, v_n$ iç çarpım uzayı V'de vektörler olsun. Eğer $i \neq j$ iken

$$\langle v_i, v_j\rangle = 0$$

ise $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ vektörlerine <u>dik (ortogonal) küme</u> denir.

Örk: $\mathbb{R}^3$'de $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ dik kümedir.

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\rangle = 1.2 + 1.1 + 1.(-3) = 0$$

Teorem: Eğer $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ iç çarpım uzayı V'de sıfırdan farklı vektörlerin dik kümesi ise $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörleri lineer bağımsızdır.

Tanım: Bir iç çarpım uzayı V'de birim vektörlerin dik kümesine ortonormal (dik ve vektörlerin uzunluğu 1 olan) küme denir.

$\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ortonormal $\Leftrightarrow \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Her dik küme $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$

$$u_i = \frac{v_i}{\|v_i\|} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

alınarak ortonormal yapılabilir.

Örk 1) $\mathbb{R}^3$'de $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ dik olduğunu biliyoruz.

$$\left\|\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$$

$$\left\|\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix}\right\| = \sqrt{14} \qquad \left\|\begin{bmatrix}4\\-5\\1\end{bmatrix}\right\| = \sqrt{42}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2/\sqrt{14}\\1/\sqrt{14}\\-3/\sqrt{14}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4/\sqrt{42}\\-5/\sqrt{42}\\1/\sqrt{42}\end{bmatrix} \right\}$$

ortonormaldir.

2) iç çarpım uzayı $C[-\pi,\pi]$'de

(iç çarpım $\langle f,g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$)

$\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx\}$ diktir

$\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx\}$ ortonormaldir.

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}\right\| = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx = 1$$

$$\|\cos x\| = 1$$

$$\|\cos nx\| = 1$$

$$\langle \cos mx, \cos nx\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx = \begin{cases} 0, & m\neq n \\ 1, & m=n \end{cases}$$